OPTION P' — **MATHÉMATIQUES** — DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986

Soit $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres entiers strictement positifs, et soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels dont au plus un nombre fini de termes sont nuls. On définit une nouvelle suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k = p_1 p_2 \cdots p_n .$$

On se propose dans ce problème d'étudier certains cas où P_n tend vers une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

I

Soit $A = \{n \in \mathbb{N}^* / p_n = 0\}$. On définit a comme étant le plus grand élément de A si A n'est pas vide, et $a = 0$ si A est vide. Soit $n_0 = a + 1$.

1° Déterminer la limite de P_n pour n tendant vers $+\infty$ lorsque A n'est pas vide.

2° Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$ on définit le nombre réel Q_n par : $\quad Q_n = \prod_{k=n_0}^{n} p_k .$

On dit que le *produit infini* $P = \prod_{k=1}^{+\infty} p_k$ *converge* si et seulement si Q_n tend vers une limite finie non nulle lorsque n tend vers $+\infty$. La *valeur* P de ce produit infini est alors par définition : $\quad P = \prod_{k=1}^{+\infty} p_k = \lim_{n\to+\infty} P_n .$

a. Montrer que pour que P converge il faut que p_n tende vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

b. On suppose que $p_n \to +1$ lorsque $n \to +\infty$. Il existe alors $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$ on ait $p_n > 0$. Montrer que pour que P converge il faut et il suffit que la série de terme général $u_n = \ln p_n$ (ln désignant le logarithme népérien) défini pour $n \geqslant n_1$ soit convergente.

c. On dit que le produit infini P est *absolument convergent* si et seulement si la série de terme général $u_n = \ln p_n$ est absolument convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $v_n = p_n - 1$. Montrer que pour que P soit absolument convergent, il faut et il suffit que la série de terme général v_n soit absolument convergente.

d. Soit σ une bijection quelconque de $\mathbb{N}^*$ sur lui-même. Montrer que si le produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty} p_k$ est absolument convergent, il en est de même du produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty} p_{\sigma(k)}$.

II

Soit $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions de la variable réelle x, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ s_{2m-1}(x) = \left(1 - \frac{x}{m\pi}\right) e^{\frac{x}{m\pi}},\ s_{2m}(x) = \left(1 + \frac{x}{m\pi}\right) e^{-\frac{x}{m\pi}}$$

1° Montrer que le produit infini $S(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} s_k(x)$ est absolument convergent pour toute valeur de x.

2° On suppose que x n'est pas un multiple entier de π. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$S_n(x) = \prod_{k=1}^{2n} s_k(x) .$$

Calculer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n(x + 2\pi)}{S_n(x)}$.

3° En déduire que la fonction $x\,S(x)$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, est périodique de période 2π.

Tournez la page S.V.P.

4° Pour tout $x \in]-1, +1[$ on considère la fonction $f_x(t)$ de la variable réelle t, périodique de période 2π, et telle que pour tout $t \in [-\pi, +\pi[$ on ait $f_x(t) = \cos x\, t$.

a. Développer $f_x(t)$ en série de Fourier réelle $\quad a_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) \cos nt + b_n(x) \sin nt$.

Justifier l'égalité de $f_x(t)$ et de la somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$ tout entier.

b. En déduire pour tout $x \in]-1, +1[$ la valeur de la somme $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2x}{n^2 - x^2}$

et pour tout $x \in]-\pi, +\pi[$ la valeur de la somme $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2x}{n^2\pi^2 - x^2}$

c. Montrer que la série de terme général, défini pour $n \geqslant 1$, $\quad \varphi_n(x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$

est absolument convergente pour tout $x \in]-\pi, +\pi[$.

Soit $\Phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(x)$. Calculer $\Phi(0)$ ainsi que $\Phi'(x)$ pour tout $x \in]-\pi, +\pi[$.

On admettra sans démonstration que l'on peut dériver $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(x)$ terme à terme.

Déduire de ce qui précède la valeur de $S(x)$ pour tout $x \in]-\pi, +\pi[$, puis pour tout $x \in \mathbb{R}$.

III

Soit $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions de la variable réelle x, à valeurs réelles, définie pour toute valeur de x qui n'est pas un nombre entier strictement négatif par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ g_n(x) = \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}}.$$

1° Montrer que le produit infini $G(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} g_k(x)$ est absolument convergent pour toute valeur de x qui n'est pas un nombre entier strictement négatif.

2° Soit $G_n(x) = \prod_{k=1}^{n} g_k(x)$. Montrer que l'on a : $\quad \ln G_n(1) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1)$.

En déduire que $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$ tend vers une limite finie γ strictement positive lorsque $\quad n \to +\infty$.

3° Pour toute valeur de x qui n'est pas un nombre entier négatif ou nul on pose : $\quad \Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} G(x)$.

a. Calculer $\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}$.

b. Calculer $\Gamma(1)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4° Montrer que l'on a pour toute valeur de x non entière : $\quad G_n(x)\, G_n(-x) = \frac{1}{S_n(\pi x)}$.

En déduire la valeur de $\Gamma(x)\,\Gamma(-x)$ et celle de $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)$.

Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail